

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике и криптографии

Задачи для 8,9 классов

Задача 1

В таблице приведена переписка двух абонентов (Godzilla и Фунтика) в чате.

Дата/время	Отправитель	Сообщение
10:11 28.11.2010	Godzilla	Привет. Как дела? Пришли пароль для почты.
10:14 28.11.2010	Фунтик	И усцрмс щюуьсэ ц Яспар-Дюрюмгщмт пс вцю пювючж. Дсмьчэ: Гщмтщпвжи.
10:21 28.11.2010	Godzilla	Когда доберешься до Питера, позвони.

Фунтик отвечает Godzilla и для конспирации каждую букву заменяет другой буквой (при этом разные буквы заменяются разными, а одинаковые – одинаковыми). Восстановите зашифрованное сообщение и пароль.

Задача 2

На клавиатуре мобильного телефона каждой кнопке сопоставлено по несколько букв: кнопке 2 соответствуют буквы **ABC**, 3 – **DEF**, 4 – **GHI**, 5 – **JKL**, 6 – **MNO**, 7 – **PQRS**, 8 – **TUV**, 9 – **WXYZ**. Выбор нужной буквы определяется числом нажатий на кнопку. Например, нажав на кнопку 4 один раз, получим букву **G**, а два нажатия на кнопку 4 дадут или букву **H** (если нажимать быстро) или две буквы **G** (если нажимать с паузой). Известно, что при наборе пароля из 10 букв были нажаты последовательно кнопки 777255899999. Определите число возможных вариантов паролей.

Задача 3

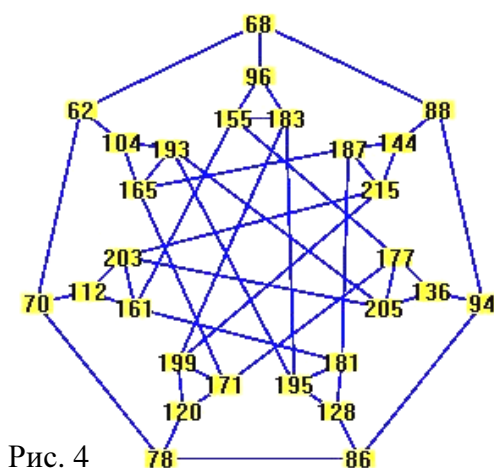
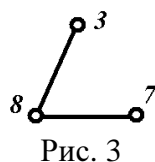
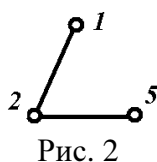
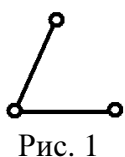
Для открытия подземелья в волшебной стране надо правильно назвать три целых числа a, b, c , служащих коэффициентами квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Представителям четырёх рас были переданы следующие значения функции: троллям – значение $f(21)$, эльфам – $f(24)$, гномам – $f(25)$, оркам – $f(28)$. Когда представители рас встретились, чтобы совместно найти a, b, c и открыть подземелье, один из представителей, чтобы сорвать мероприятие, предъявил неверное значение. Выясните, кто это был, если известно, что тролли предъявили число 273, эльфы – 357, гномы – 391, орки – 497.

Задача 4

В концах диаметра окружности расположены числа 1 и 5, разбивающие окружность на две дуги. Совершим по окружности n оборотов по часовой стрелке, приняв за начало обхода один из концов диаметра. После прохождения каждой имеющейся на данный момент дуги делим её пополам и в середине записываем число $\frac{3x+3y}{2}$, где x и y – числа, стоящие на концах пройденной дуги, взятые в порядке направления обхода. Найдите сумму всех записанных чисел после n оборотов.

Задача 5

Для зашифрования натурального числа m используется граф, представляющий собой множество вершин, некоторые из которых соединены друг с другом прямой линией. Вершины графа, соединенные друг с другом, называют *соседними*. Зашифрование состоит в выполнении следующих действий. В вершины графа записываются натуральные числа так, чтобы их сумма была равна m . Затем к числу в каждой вершине прибавляются числа в соседних вершинах. В результате получается граф, в котором «зашифровано» число m . Пример: для зашифрования числа 8 будем использовать граф на рис. 1. В его вершины поместим числа, сумма которых равна 8 (рис. 2). Затем к каждому числу прибавим числа в соседних вершинах. Результат зашифрования указан на рис. 3. На рис. 4 приведен результат зашифрования некоторого числа. Найдите его.



Задача 6

Для прохода в учреждение необходимо предъявить пятизначную комбинацию, состоящую из нулей и единиц. Устройство распознавания представляет собой упрощённую модель нейрона – клетки головного мозга (см. рис. 6).

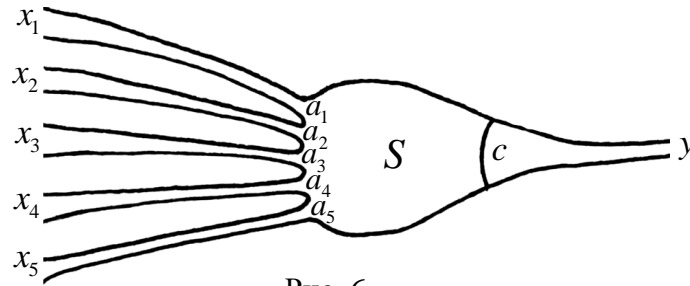


Рис. 6

Пятизначная комбинация x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 по пяти каналам поступает в клетку, где её компоненты умножаются на фиксированные целые числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , и вычисляется сумма $S = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5$. Проход в учреждение открывается, только если $S \geq c$, где c – некоторое фиксированное целое число. В таблице 1 представлены те комбинации, при предъявлении которых проход открывается, а в таблице 2 – для которых проход закрыт.

Таблица 1			Таблица 2			
1,0,1,1,0	1,1,0,1,0	1,1,1,1,1	1,0,1,0,0	0,0,1,1,0	1,1,0,1,1	1,0,1,1,1

Найдите ещё одну комбинацию, открывающую проход в учреждение.